

## ИССЛЕДОВАНИЕ ВЗАИМНОГО ВЛИЯНИЯ ПОПЕРЕЧНЫХ И КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ РОТОРА, ВРАЩАЮЩЕГОСЯ В УПРУГИХ ОПОРАХ

### Аннотация.

*Актуальность и цели.* Объектом исследования является ротор электропривода ротационного стенда, закрепленный в упругих опорах. Предметом исследования является взаимосвязь поперечных и крутильных колебаний, возникающих при вращении ротора электропривода ротационного стенда. Цель работы – исследование взаимосвязи поперечных и крутильных колебаний и разработка математической модели, учитывающей эту взаимосвязь.

*Материалы и методы.* Исследовались взаимосвязи поперечных и крутильных колебаний, возникающих при вращении ротора центрифуги.

*Результаты.* Разработана линеаризованная математическая модель ротора в упругих опорах, учитывающая влияние поперечных и крутильных колебаний. Получено доказательство того, что при изгибных колебаниях возникают крутильные деформации и наоборот.

*Выводы.* Исследования колебаний ротора позволили сделать вывод, что поперечные и крутильные колебания существенно влияют друг на друга. Также это позволило разработать линеаризованную математическую модель ротора, в которой это взаимодействие учтено.

**Ключевые слова:** поперечные колебания, крутильные колебания, демпфирование, математическое моделирование, взаимовлияние колебаний, ротор в упругих опорах, линеаризация математической модели.

## A RESEARCH OF CROSS-EFFECTS OF TRANSVERSAL AND ROTATIVE VIBRATIONS OF AN ELASTIC-SUPPORTED ROTOR

### Abstract.

*Background.* The object of the research is an elastic-supported rotor of a servomechanism engine. The subject of the research is cross-effects of transversal and rotative vibrations which take place at servomechanism rotor functioning. The goal of research is to investigate the cross-effects of transversal and rotative vibrations and to design a mathematical model regarding these cross-effects.

*Materials and methods.* The authors investigated the interrelation of transversal and rotative vibrations taking place during servomechanism rotor functioning.

*Results.* The researchers have developed a linearized mathematical model of an elastic-supported rotor, which considers the interference of transversal and rotative vibrations. The work proves that transversal vibrations cause torsional deformations and visa versa.

*Conclusions.* The research of rotor vibrations allows to conclude that the cross-effects of transversal and rotative vibrations are significant. It led to elaboration of the linearized mathematical model that takes into account this interaction.

**Key words:** transversal vibrations, rotative vibrations, damping, mathematical simulation, cross-effects of vibrations, elastic-supported rotor, mathematical model linearization.

## Введение

Роторы, или валы, являются главными элементами большинства энергетических, электрических и транспортных машин, а также многих приборов, и служат в них для передачи крутящего момента или кругового движения, что неизбежно приводит к возникновению вредных вибраций. Причины возникновения таких вибраций весьма многообразны и определяются как конструктивными особенностями машин, так и режимами их работы.

Широко известны классические работы по роторной динамике А. Тондла [1], Ф. М. Диментберга [2]. Динамику роторов, имеющих упругие опоры, рассматривали А. С. Кельзон [3, 4], И. А. Пасынкова [5], J. Genta [6], Muszynska A. [7] и др. В работе [8] рассматриваются модели роторных систем с линейно-упругими массивными опорами, а также системы с нелинейно-упругими безмассовыми опорами с кубической нелинейностью (типа Дуффинга). В статье [9] рассматривается влияние скорости вращения ротора на его передаточные функции, связывающие крутящий момент с частотой крутильных колебаний. При этом установлено, что изменение частоты вращения ротора приводит к изменению вида передаточных функций. Это явление существенно усложняет синтез систем управления, так как управляемый объект становится объектом с переменными параметрами, зависящими от режимов работы системы.

В настоящей работе рассматриваются причины возникновения такого явления, вызываемого взаимным влиянием поперечных и крутильных колебаний роторных систем.

### 1. Математические модели поперечных и крутильных колебаний ротора

Для установления причин изменения передаточных функций ротора рассмотрим модель однодискового ротора, диск которого обладает статической неуравновешенностью и расположен на валу длиной  $l$  несимметрично относительно опор (рис. 1). Опоры ротора являются массивными и упругими. Вал и опоры приняты изотропно-упругими. Кроме поступательных перемещений  $x, y$ , положение диска определяется угловыми перемещениями  $\theta_1, \theta_2$ . Положение опор определяется их перемещениями  $x_1, y_1, x_2, y_2$ .

Уравнения вынужденных колебаний системы имеют следующий вид:

$$m \frac{dX}{dt} = -\rho_1 X - C_{11}x - C_{12}\theta_2 - \left( \frac{C_{12}}{l} - C_{11}h_2 \right) x_1 + \left( C_{11}h_1 + \frac{C_{12}}{l} \right) x_2 + \varepsilon \Omega^2 m \cos \Omega t;$$

$$m \frac{dY}{dt} = -\rho_1 Y - C_{11}y + C_{12}\theta_1 - \left( \frac{C_{12}}{l} - C_{11}h_2 \right) y_1 + \left( C_{11}h_1 + \frac{C_{12}}{l} \right) y_2 + \varepsilon \Omega^2 m \sin \Omega t;$$

$$I_e \frac{d\theta_1}{dt} = -\rho_2 \theta_1 - I_p \Omega \theta_2 + C_{21}y - C_{22}\theta_1 - \left( C_{21}h_2 - \frac{C_{22}}{l} \right) y_1 + \left( C_{21}h_1 + \frac{C_{22}}{l} \right) y_2;$$

$$I_e \frac{d\theta_2}{dt} = I_p \Omega \theta_1 - \rho_2 \theta_2 - C_{21}x - C_{22}\theta_2 + \left( C_{21}h_2 - \frac{C_{22}}{l} \right) x_1 + \left( C_{21}h_1 + \frac{C_{22}}{l} \right) x_2;$$

$$m_1 \frac{dX_1}{dt} = -\beta X_1 - s_1 x - s_2 \theta_2 - \left( \frac{s_2}{l} - s_1 h_2 + c_{x1} \right) x_1 + \left( \frac{s_2}{l} + s_1 h_1 \right) x_2;$$

$$\begin{aligned}
m_1 \frac{dY_1}{dt} &= -\beta Y_1 - s_1 y + s_2 \theta_1 - \left( \frac{s_2}{l} - s_1 h_2 + c_{y1} \right) y_1 + \left( \frac{s_2}{l} + s_1 h_1 \right) y_2; \\
m_2 \frac{dX_2}{dt} &= -\beta X_2 - s_3 x - s_4 \theta_2 - \left( \frac{s_4}{l} - s_3 h_2 \right) x_1 + \left( \frac{s_4}{l} + s_3 h_1 - c_{x2} \right) x_2; \\
m_2 \frac{dY_2}{dt} &= -\beta Y_2 - s_3 y + s_4 \theta_1 - \left( \frac{s_4}{l} - s_3 h_2 \right) y_1 + \left( \frac{s_4}{l} + s_3 h_1 - c_{y2} \right) y_2; \quad (1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= X; & \frac{dy}{dt} &= Y; \\
\frac{d\theta_1}{dt} &= \Theta_1; & \frac{d\theta_2}{dt} &= \Theta_2; \\
\frac{dx_1}{dt} &= X_1; & \frac{dy_1}{dt} &= Y_1; \\
\frac{dx_2}{dt} &= X_2; & \frac{dy_2}{dt} &= Y_2,
\end{aligned}$$

где  $m, I_p, I_e$  – масса и моменты инерции диска;  $m_1, m_2$  – массы опор;

$$C_{11} = \frac{3EJ(l_1^3 + l_2^3)}{l_1^3 l_2^3}, \quad C_{12} = C_{21} = \frac{3EJl(l_1 - l_2)}{l_1^2 l_2^2}, \quad C_{22} = \frac{3EJ}{l_1 l_2} -$$

статические коэффициенты жесткости вала;  $\varepsilon$  – эксцентриситет диска;  $\Omega$  – частота вращения ротора;  $\beta, \rho_1, \rho_2$  – коэффициенты демпфирования перемещений опор и диска;  $c_{x1}, c_{y1}, c_{x2}, c_{y2}$  – коэффициенты, характеризующие линейную часть восстанавливающих сил в опорах (для левой и правой опор соответственно);

$$\begin{aligned}
s_1 &= \frac{C_{12}}{l} - C_{11} h_2, & s_2 &= \frac{C_{22}}{l} - C_{12} h_2, \\
s_3 &= -\frac{C_{12}}{l} - C_{11} h_1, & s_4 &= -\frac{C_{22}}{l} - C_{12} h_1, & h_1 &= \frac{l_1}{l}, & h_2 &= \frac{l_2}{l}.
\end{aligned}$$

Вывод уравнений (1) как уравнений Лагранжа второго рода можно найти в [10].

Для анализа динамики ротора в MATLAB перейдем к матричной форме записи уравнений:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{x} = [x, y, \theta_1, \theta_2, x_1, y_1, x_2, y_2, X, Y, \Theta_1, \Theta_2, X_1, Y_1, X_2, Y_2]$ ,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \varepsilon \Omega^2 m \cos \Omega t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon \Omega^2 m \cos \Omega t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



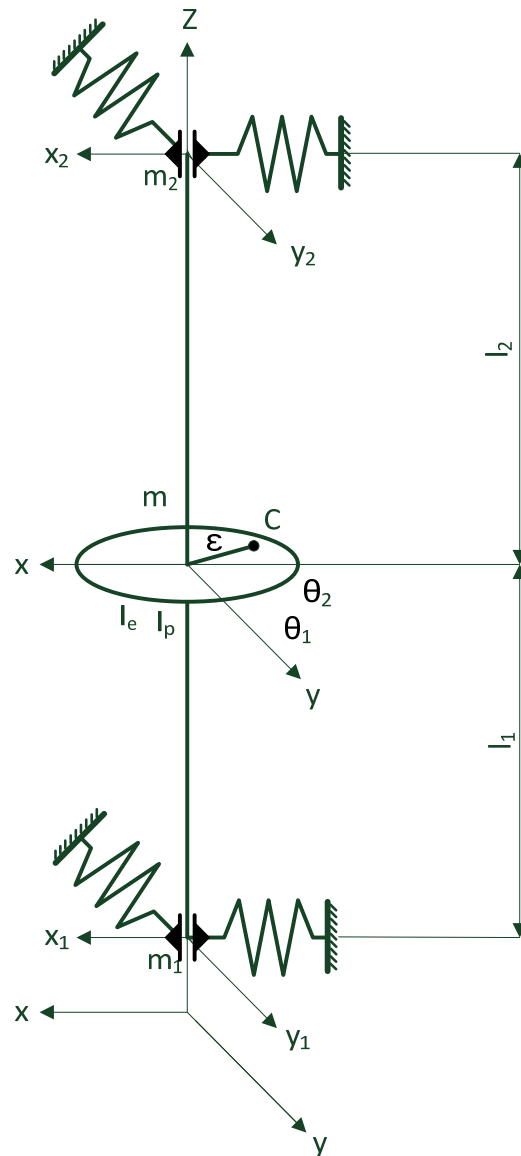


Рис. 1. Расчетная схема ротора

На рис. 2 и 3 представлены временные и частотные характеристики ротора.

Расчет характеристик проводился при следующих параметрах ротора [8]:  $m_1 = m_2 = 2$  кг,  $m = 12$  кг,  $I_e = 0,1225$  кг·м<sup>2</sup>,  $I_p = 0,24$  кг·м<sup>2</sup>,  $\varepsilon = 0,00003$  м,  $l = 0,8$  м,  $l_1 = 0,24$  м,  $c_{x1} = c_{y1} = k_{x1} = k_{y1} = 7 \cdot 10^5$  Н/м,  $c_{x2} = c_{y2} = k_{x2} = k_{y2} = 8 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>3</sup>,  $E = 2,1 \cdot 10^{11}$  Па,  $\beta = 60$  Н·с/м,  $\rho_1 = 5$  Н·с/м,  $\rho_2 = 5$  Н·с,  $J = 3,976 \cdot 10^{-8}$  м<sup>4</sup>.

Помимо изгибных колебаний, вал ротора испытывает крутильные колебания, возникающие под действием момента, создаваемого электроприводом ротора. Динамику крутильных колебаний опишем двухмассовой моделью электропривода постоянного тока с независимым возбуждением [11].

$$L \frac{dI}{dt} + Ri + c_e \omega_1 = U;$$

$$J_1 \frac{d\omega_1}{dt} = M_d - M_{12}$$

$$J_2 \frac{d\omega_2}{dt} = M_{12} - M_c - M_{кр};$$

$$M_d = c_e I;$$

$$M_{12} = C(\varphi_1 - \varphi_2) + \beta(\omega_1 - \omega_2), \quad (3)$$

где  $L$  и  $R$  – индуктивность и активное сопротивление якоря;  $c_e = c_m$  – конструктивные коэффициенты двигателя;  $J_1$  и  $J_2$  – приведенные моменты инерции двухмассовой модели;  $M_d$ ,  $M_c$ ,  $M_{кр}$  – момент двигателя, момент сопротивления и момент обусловленный поперечными колебаниями ротора;  $I$  – ток якоря;  $C$ ,  $\beta$  – жесткость и коэффициент демпфирования вала;  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  – углы поворота и частоты вращения вала ротора соответственно.

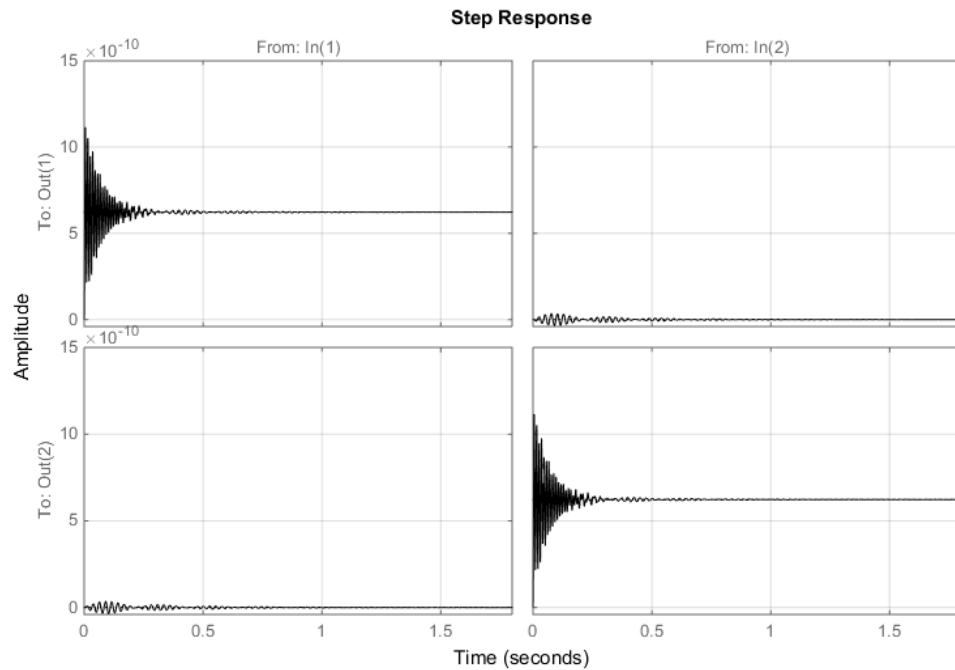


Рис. 2. Переходные характеристики ротора

В работе [12] показано, что между крутильными и изгибными формами колебаний существует связь, выражающаяся в том, что при изгибных колебаниях возникают деформации кручения и наоборот. Это происходит из-за несовпадения в общем случае центров масс сечений с центрами жесткостей и приводит к возникновению совместных изгибно-крутильных колебаний. Та-

кие формы колебаний особенно характерны при близости собственных частот по изгибным и крутильным формам.

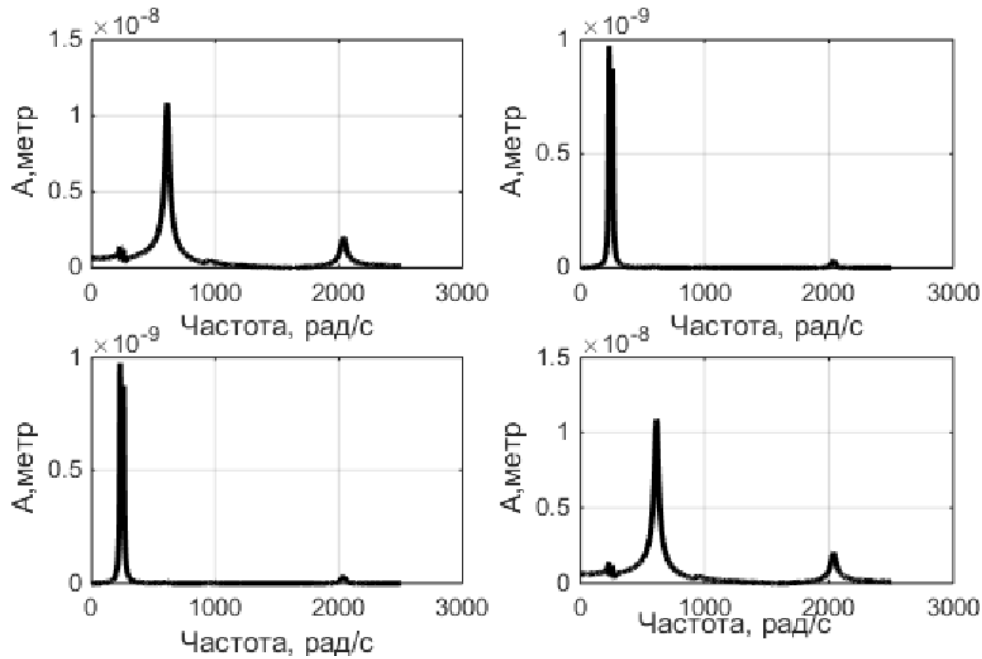


Рис. 3. Частотные характеристики ротора

Характерным также является отсутствие, как правило, прямой связи уровня вибраций с величиной, передаваемой или вырабатываемой мощности [13].

В связи с этим энергетическую взаимосвязь между поперечными и крутильными колебаниями выразим через квадратичную форму поперечных колебаний, связав ее через частоту вращения ротора с крутящим моментом, как показано на рис. 4.

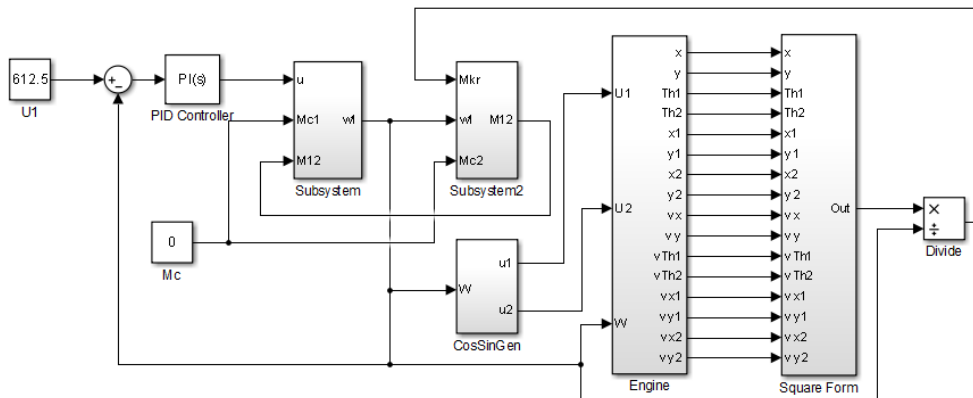


Рис. 4. Simulink-модель ротора, учитывающая взаимосвязь между поперечными и крутильными колебаниями





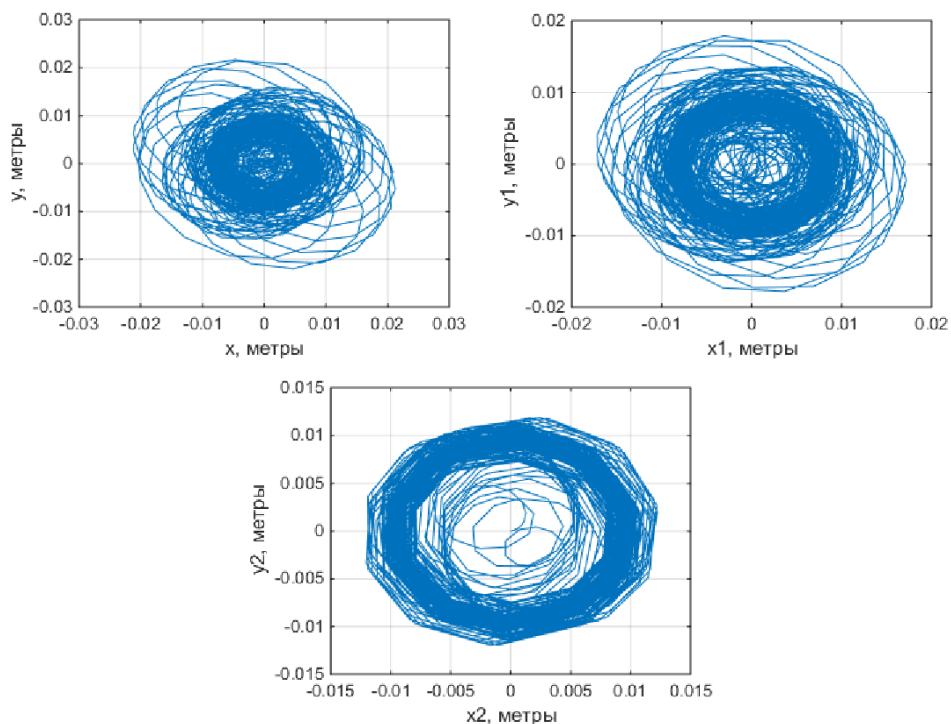


Рис. 6. Фазовые траектории движения ротора;  $\omega = \omega_{p3} = 612,3$  рад/с

Анализ приведенных рисунков показывает, что взаимодействие поперечных и крутильных колебаний приводит к усилению резонансных явлений, что проявляется в увеличении амплитуды вибраций.

## 2. Структурная схема ротора как управляемой системы

На основе разработанных математических моделей построим структурную схему ротора как объекта управления. Она включает в себя модели продольных и поперечных колебаний ротора, а также взаимные связи между этими моделями (рис. 8).

Для проведения дальнейших исследований необходимо провести линеаризацию модели с целью получения передаточной функции, связывающей напряжение на двигателе  $U$  с частотой вращения ротора  $\omega_2$ .

Исследования динамики ротора по выведенной на Simulink-модели позволили установить, что взаимное влияние поперечных и крутильных колебаний проявляется в резонансных режимах, когда амплитуда поперечных колебаний возрастает, как показано на рис. 7. На частотах вращения ротора, отличных от резонансных, взаимное влияние поперечных и крутильных колебаний пренебрежимо мало.

С учетом этого нелинейную взаимосвязь между поперечными и крутильными колебаниями можно линеаризовать и представить в виде колебательного звена, собственная частота которого совпадает с одной из резонансных частот поперечных колебаний ротора. Очевидно, что при изменении частоты вращения ротора будет меняться и собственная частота колебательного звена.

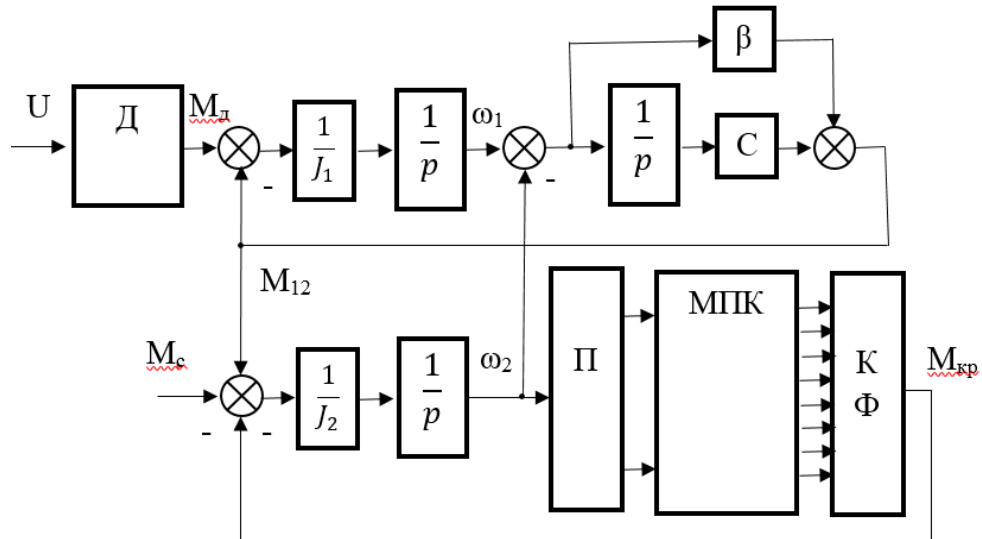


Рис. 8. Структурная схема ротора: Д – двигатель, Π – элемент, реализующий дисбаланс ротора, МПК – модель поперечных колебаний, КФ – квадратичная форма от обобщенных координат ротора

Линеаризованная структурная схема ротора приведена на рис. 9.

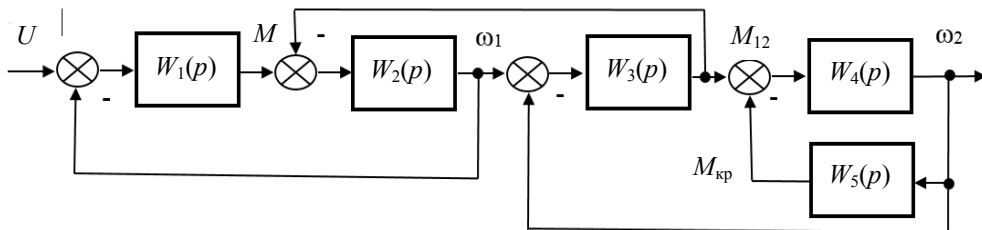


Рис. 9. Структурная схема линеаризованной динамической модели ротора

Выражения для передаточных функций получены из уравнений (3) с учетом линеаризованной взаимосвязи поперечных и крутильных колебаний, задаваемой передаточной функцией  $W_5(p)$ :

$$W_1(p) = \frac{c_e}{Lp + R}; \quad W_2(p) = \frac{1}{J_1 p}; \quad W_3(p) = \frac{\beta p + c}{p};$$

$$W_4(p) = \frac{1}{J_2 p}; \quad W_5(p) = \frac{k}{p^2 + a_1 p + a_2}. \quad (4)$$

На рис. 10 показаны амплитудно-частотные характеристики линеаризованной динамической модели ротора при работе на резонансных частотах  $\omega_{p1} = 229,7$  рад/с и  $\omega_{p3} = 612,3$  рад/с с разными коэффициентами передачи колебательного звена, задаваемого передаточной функцией  $W_5(p)$ .

Жирной линией показана амплитудно-частотная характеристика при отсутствии взаимного влияния поперечных и крутильных колебаний друг на друга.

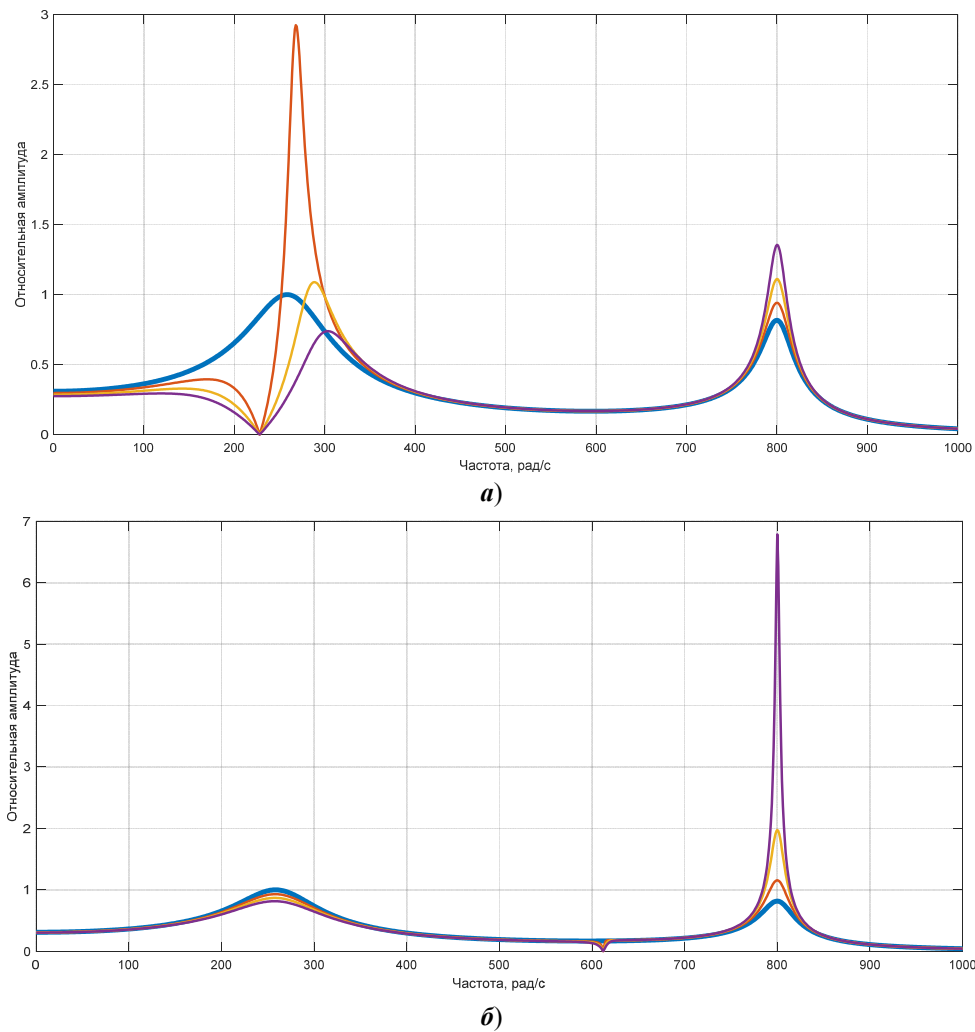


Рис. 10. Амплитудно-частотные характеристики линейризованной динамической модели ротора: ***a*** –  $\omega_{p1} = 229,7$  рад/с; ***б*** –  $\omega_{p3} = 612,3$  рад/с

### Заклучение

Разработаны математические модели поперечных и крутильных колебаний ротора. Получена линейризованная обобщенная модель динамики ротора, учитывающая влияние поперечных и крутильных колебаний.

Путем математического моделирования доказано, что между крутильными и изгибными формами колебаний существует связь, выражающаяся в том, что при изгибных колебаниях возникают деформации кручения и наоборот.

На частотах вращения ротора, совпадающих с резонансными частотами поперечных колебаний, происходит уменьшение амплитуды крутильных колебаний, что обусловлено демпфирующим действием изгибных колебаний.

Увеличение коэффициента связи между поперечными и крутильными колебаниями приводит к увеличению амплитуды резонансных пиков крутильных и поперечных колебаний.

Увеличение амплитуды крутильных колебаний сказывается на частотах, превышающих резонансную частоту поперечных колебаний. Если низшая резонансная частота поперечных колебаний больше резонансных частот крутильных колебаний, то взаимного влияния колебаний друг на друга можно не учитывать.

При совпадении или близости частот поперечных и крутильных колебаний система может потерять устойчивость.

#### **Библиографический список**

1. **Tondl, A.** Some problems of rotor dynamics / A. Tondl. – London : Chapman and Hall, 1965.
2. **Диментберг, Ф. М.** Изгибные колебания вращающихся валов / Ф. М. Диментберг. – М. : Изд-во АН СССР, 1959.
3. **Кельзон, А. С.** Расчет и конструирование роторных машин / А. С. Кельзон, Ю. Н. Журавлев, Н. В. Январев. – Л. : Машиностроение, 1977. – 287 с.
4. **Кельзон, А. С.** Динамика роторов в упругих опорах / А. С. Кельзон, Ю. П. Циманский, В. И. Яковлев. – М. : Наука, 1982.
5. **Пасынкова, И. А.** Бифуркации прецессионного движения неуравновешенного ротора / И. А. Пасынкова // Прикладная математика и механика. – 2006. – № 4. – С. 605–616.
6. **Genta, G.** Dynamics of Rotating Systems / G. Genta. – Berlin : Springer, 2005. – 660 p.
7. **Muszynska, A.** Rotordynamics / A. Muszynska. – Boca Raton: Taylor&Francis, 2005. – 1054 p.
8. **Перепелкин, Н. В.** Построение и анализ устойчивости резонансных режимов движения однодискового ротора на нелинейно-упругих опорах / Н. В. Перепелкин, Ю. В. Михлин // Динамические системы. – 2011. – Т. 1 (29), № 2. – С. 269–280.
9. **Поляхов, Н. Д.** Исследование динамики вращающегося ротора в активных магнитных подшипниках / Н. Д. Поляхов, А. Д. Стоцкая // Электротехника. – 2012. – № 8. – С. 50–64.
10. **Аврамов, К. V.** Asymptotic analysis of forced vibrations of a one-disc rotor on a nonlinear flexible base / K. V. Avramov // Proceedings of the IMechE, Part C: Journal of Mech. Engineering Science. – 2010. – Vol. 224. – P. 1593–1604.
11. **Ключев, В. И.** Теория электропривода : учеб. для вузов / В. И. Ключев. – 2-е изд. перераб. и доп. – М. : Энергоатомиздат, 2001. – 704 с.
12. **Иванов, В. П.** Колебания рабочих колес турбомашин / В. П. Иванов. – М. : Машиностроение, 1983. – 224 с.
13. Вибрации в технике : справочник : в 6 т. / ред. В. Н. Челомей (пред). Т. 3. Колебания машин, конструкций и их элементов / под ред. Ф. М. Диментберга и К. С. Колесникова. – М. : Машиностроение, 1980. – 544 с.

#### **References**

1. Tondl A. *Some problems of rotor dynamics*. London: Chapman and Hall, 1965.
2. Dimentberg F. M. *Izhibnye kolebaniya vrashchayushchikhsya valov* [Transversal vibrations of torsion shafts]. Moscow: Izd-vo AN SSSR, 1959.
3. Kel'zon A. S., Zhuravlev Yu. N., Yanvarev N. V. *Raschet i konstruirovaniye rotornykh mashin* [Rotor machine design and construction]. Leningrad: Mashinostroenie, 1977, 287 p.
4. Kel'zon A. S., Tsimanskiy Yu. P., Yakovlev V. I. *Dinamika rotorov v uprugikh oporakh* [Elastic-supported rotor dynamics]. Moscow: Nauka, 1982.

5. Pasyukova I. A. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied mathematics and mechanics]. 2006, no. 4, pp. 605–616.
6. Genta G. *Dynamics of Rotating Systems*. Berlin: Springer, 2005, 660 p.
7. Muszynska A. *Rotordynamics*. Boca Raton: Taylor&Francis, 2005, 1054 p.
8. Perepelkin N. V., Mikhlin Yu. V. *Dinamicheskie sistemy* [Dynamics systems]. 2011, vol. 1 (29), no. 2, pp. 269–280.
9. Polyakhov N. D., Stotskaya A. D. *Elektrotehnika* [Electrical engineering]. 2012, no. 8, pp. 50–64.
10. Avramov K. V. *Proceedings of the IMechE, Part C: Journal of Mech. Engineering Science*. 2010, vol. 224, pp. 1593–1604.
11. Klyuchev V. I. *Teoriya elektroprivoda: ucheb. dlya vuzov* [The electric drive theory: textbook for universities]. 2nd ed. revised and expanded. Moscow: Energoatomizdat, 2001, 704 p.
12. Ivanov V. P. *Kolebaniya rabochikh koles turbomashin* [Turbomachine's rotor vibration]. Moscow: Mashinostroenie, 1983, 224 p.
13. *Vibratsii v tekhnike: spravochnik: v 6 t. Red. V. N. Chelomey (pred). T. 3. Kolebaniya mashin, konstruktsiy i ikh elementov* [Vibrations in engineering: reference book: in 6 volumes. Edited by V.N. Chelomey. Vol. 3. Vibrations of machines, constructions and elements thereof] Ed. by F. M. Dimentberg, K. S. Kolesnikov. Moscow: Mashinostroenie, 1980, 544 p.

---

**Семенов Анатолий Дмитриевич**

доктор технических наук, профессор,  
кафедра автоматики и телемеханики,  
Пензенский государственный  
университет (Россия, г. Пенза,  
ул. Красная, 40)

E-mail: sad-50@mail.ru

**Semenov Anatoliy Dmitrievich**

Doctor of engineering sciences, professor,  
sub-department of automation and remote  
control, Penza State University  
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

**Будаговский Дмитрий Александрович**

аспирант, Пензенский государственный  
университет (Россия, г. Пенза,  
ул. Красная, 40)

E-mail: budagovsky92@gmail.com

**Budagovskiy Dmitriy Aleksandrovich**

Postgraduate student, Penza State  
University (40 Krasnaya street,  
Penza, Russia)

---

УДК 531.3

**Семенов, А. Д.**

**Исследование взаимного влияния поперечных и крутильных колебаний ротора, вращающегося в упругих опорах / А. Д. Семенов, Д. А. Будаговский // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. – 2017. – № 4 (44). – С. 81–93. DOI 10.21685/2072-3059-2017-4-8**